(14/11/2005, 17h00)

Sur le comportement local de la répartition de l'indicatrice d'Euler

Gérald Tenenbaum & Vincent Toulmonde

À Eduard Wirsing, en témoignage d'amicale admiration.

Sommaire

1. Introduction

1·1. Historique et motivation

Soit φ la fonction indicatrice d'Euler. Le premier exemple historique de loi de répartition limite pour une fonction arithmétique est dû à Schoenberg, qui, en 1928 [6], établit la formule

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\leqslant N\\ \varphi(n)/n\leqslant t}} 1 = G(t)+o(1) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1,\ N\to\infty) \tag{1·1}$$

où $G(t)$ dépend continûment de t et vérifie $G(0)=0$, $G(1)=1$.

Il est remarquable que, près de quatre-vingts ans plus tard, ce problème recèle encore bien des questions ouvertes. Ainsi, alors qu'Erdős a remarqué dans [5] que la borne supérieure, pour $0\leqslant t\leqslant 1$, du terme d'erreur de (1·1) est $\gg 1/\log N$, on conjecture que cette valeur est effectivement admissible. Dans cette direction, le meilleur résultat connu, dû à Elliott ([3], th. 5.6), fournit seulement la majoration

$$\ll \frac{\log_2 N}{\log_3 N \log N}.$$

Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

L'étude du comportement local de la loi limite G est également inachevée. Schoenberg a établi dans [7] que G est strictement croissante sur $[0,1]$ et Erdős [4] a montré que la mesure $\mathrm{d}G$ est purement singulière, ce qui implique en particulier que $G'(t)=0$ pour presque tout t. Enfin, Erdős [5] a prouvé en 1974 la majoration

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\{G(t)-G(t-\varepsilon t)\}\ll\frac{1}{\log(1/\varepsilon)}\qquad(0<\varepsilon<1)\tag{1·2}$$

et son optimalité sous la forme indiquée. Diamond & Rhoads [1] ont obtenu en 1984 une nouvelle preuve de cette estimation par des techniques spécifiques de la théorie des fonctions à valeur moyenne bornée.

Dans son récent travail de thèse [9], dont les résultats principaux font l'objet des publications [10] et [11], le second auteur affine la majoration (1·2) en établissant, d'une part, que le maximum du membre de gauche est essentiellement atteint lorsque t est un nombre rationnel de la forme $\varphi(n)/n$ à petit dénominateur et, d'autre part, que les « grandes » valeurs de $G(t)-G(t-\varepsilon t)$ peuvent être décrites simplement en fonction du comportement de G au voisinage de 1. Plus précisément, posant

$$\begin{aligned}
&K(t):=\sum_{\varphi(n)/n=t}1/n\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),\\
&\mathcal{A}(\varepsilon):=\Big\{\varphi(n)/n:1\leqslant n\leqslant\varepsilon^{-1/8}\Big\}\qquad(0<\varepsilon<1),\\
&L(x):=\mathrm{e}^{\sqrt{\log x\log_2 x}}\quad(x\geqslant 3),
\end{aligned}$$

il établit [9] que l'on a, uniformément pour $0<\varepsilon<1/3$ et $t\in\mathcal{A}(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
&G(t)-G(t-\varepsilon t)=K(t)\{G(1)-G(1-\varepsilon)\}+O\Big(L(1/\varepsilon)^{-1/5}\Big),\\
&G(t+\varepsilon t)-G(t)\ll L(1/\varepsilon)^{-1/5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le comportement de G autour de $t=1$ est représentatif du cas général des irrégularités locales. Cela a motivé l'étude au voisinage de 1 développée dans [9] par des méthodes d'équations fonctionnelles.

En introduisant des méthodes d'analyse complexe, nous nous proposons ici de préciser (voir notamment le Théorème 1.2 *infra*) les résultats obtenus dans [9] sur cet aspect de la question.

1·2. Notations

Nous posons

$$\mathcal{L}(x):=\exp\left(\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log_2 x)^{1/5}}\right)\qquad(x\geqslant 3),$$

désignons par $\pi(x)$ la fonction de comptage des nombres premiers, et par

$$\operatorname{li}(x)=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}\qquad(x\geqslant 2)\tag{1·3}$$

le logarithme intégral. Ainsi, en vertu du théorème des nombres premiers, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$R(x) := \pi(x) - \mathrm{li}(x) \ll x/\mathcal{L}(x)^c \qquad (x \geqslant 3). \tag{1·4}$$

Lorsque l'argument est complexe, la notation log désigne la détermination principale de la fonction logarithme. Pour $s \in \mathbb{C}$, nous définissons implicitement les nombres réels σ et τ par $s := \sigma + i\tau$.

Enfin, nous posons

$$\lambda_0(s) := \exp\left\{ -\gamma + \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-st}}{t \log t}\, \mathrm{d}t \right\} \qquad (s \in \mathbb{C}), \tag{1·5}$$

où γ désigne la constante d'Euler.

1·3. Résultats

Nous obtenons d'une part une approximation régulière, d'autre part un développement asymptotique, de $G(t)$ au voisinage de $t = 1$.

Théorème 1.1. *Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que l'on ait, uniformément pour $3 \leqslant 1/h \leqslant T \leqslant \mathcal{L}(1/h)^{c_1}/h$,*

$$1 - G(1 - h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1/h - iT}^{1/h + iT} \lambda_0(s) \mathrm{e}^{hs} \frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left(\frac{1}{\sqrt{hT}} \right). \tag{1·6}$$

Théorème 1.2. *Il existe une constante $c_2 > 0$ et une suite réelle $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ telles que l'on ait, uniformément pour $N \geqslant 1$ et $\sigma \geqslant 3$,*

$$1 - G(1 - 1/\sigma) = \sum_{1 \leqslant n < N} \frac{g_n}{(\log \sigma)^n} + O\left(\frac{|g_N|}{(\log \sigma)^N} + \frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^{c_2}} \right). \tag{1·7}$$

De plus, nous avons

$$g_n = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right\} \mathrm{e}^{-\gamma} (-1)^n (n-3)! \qquad (n \geqslant 3) \tag{1·8}$$

et

$$g_1 = \mathrm{e}^{-\gamma}, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = -\tfrac{1}{12}\pi^2 \mathrm{e}^{-\gamma}. \tag{1·9}$$

Notre méthode consiste essentiellement à exploiter, lorsque $w > 0$, la formule d'inversion

$$\int_0^w \left\{ 1 - G(\mathrm{e}^{-t}) \right\} \mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda(s) \mathrm{e}^{ws} \frac{\mathrm{d}s}{s^2} \qquad (\sigma > 0), \tag{1·10}$$

où

$$\lambda(s) := \prod_p \left(1 + \frac{(1-1/p)^s - 1}{p}\right) \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{1·11}$$

est la valeur moyenne de $(\varphi(n)/n)^s$, i.e.

$$\lambda(s) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \{\varphi(n)/n\}^s \qquad (s \in \mathbb{C}). \tag{1·12}$$

Nous choisissons l'abscisse d'intégration dans (1·10) de manière essentiellement optimale. Nous approchons ensuite, grâce au théorème des nombres premiers, le produit infini $\lambda(s)$ par l'expression $\lambda_0(s)$, définie en (1·5).

La formule (1·12) est classique. Elle découle, par exemple, du résultat établi dans les Notes sur le paragraphe I.3.8 de [8] pour le choix $f(n) = (\varphi(n)/n)^s$ puisque, notant μ la fonction de Möbius, $g := f * \mu$, on a alors $g(p) = (1-1/p)^s - 1 \ll |s|/p$ et $g(p^\nu) = 0$ si $\nu > 1$.

2. Estimation intégrale de $\boldsymbol{\lambda(s)}$

Nous donnons ici une approximation régulière d'intérêt indépendant pour la transformée de Laplace-Stieltjes $\lambda(s)$ de la mesure dG.

Lemme 2.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, uniformément pour $\sigma \geqslant 3$ et $|s| \leqslant \sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$,*

$$\lambda(s) = \lambda_0(s) + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right). \tag{2·1}$$

Démonstration. Mettons $(1-1/p)$ en facteur dans le terme général du produit infini (1·11) lorsque $p \leqslant \sigma$. Nous obtenons, grâce à la formule de Mertens,

$$\lambda(s) = \prod_{p\leqslant\sigma} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \mathrm{e}^{H_1(s)+H_2(s)} = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^c}\Big)\Big\} \frac{\mathrm{e}^{-\gamma+H_1(s)+H_2(s)}}{\log\sigma} \tag{2·2}$$

avec

$$H_1(s) := \sum_{p\leqslant\sigma} \log\left(1 + \frac{(1-1/p)^{s-1}}{p}\right), \quad H_2(s) := \sum_{p>\sigma} \log\left(1 + \frac{(1-1/p)^s - 1}{p}\right),$$

où, comme il a été précisé plus haut, les logarithmes sont pris en détermination principale.

Estimons $H_1(s)$. La contribution des nombres premiers p n'excédant pas $\sqrt{\sigma}$ est trivialement

$$\ll \sum_{p\leqslant\sqrt{\sigma}} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma}}}{p} \ll \mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma}/2}.$$

Lorsque $\sqrt{\sigma} < p \leqslant \sigma$, $|s| \ll \sigma^2$, on peut écrire

$$\Bigl(1-\frac{1}{p}\Bigr)^{s-1} = \mathrm{e}^{-s/p}\Bigl\{1+O\Bigl(\frac{1}{p}+\frac{|s|}{p^2}\Bigr)\Bigr\}.$$

Il suit

$$H_1(s) = \sum_{p\leqslant\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-s/p}}{p} + O\Bigl(\frac{|s|}{\sigma^2\log\sigma}\Bigr)$$

où le terme d'erreur a été estimé par sommation d'Abel à l'aide du théorème des nombres premiers. Le terme principal relève d'un traitement semblable. Nous obtenons, avec la notation (1·4),

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-s/p}}{p} &= \int_2^\sigma \frac{\mathrm{e}^{-s/x}\,\mathrm{d}x}{x\log x} + \int_2^\sigma \frac{\mathrm{e}^{-s/x}\,\mathrm{d}R(x)}{x}\\ &= -\int_{1/\sigma}^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{t\log t} + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right),\end{aligned}$$

et donc, dans les conditions de l'énoncé,

$$H_1(s) = -\int_{1/\sigma}^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{t\log t} + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right) \tag{2·3}$$

puisque la contribution au terme principal de l'intervalle $1/\mathrm{e} \leqslant t \leqslant 1/2$ est trivialement $\ll \mathrm{e}^{-\sigma/3}$.

Estimons à présent $H_2(s)$. Nous avons

$$\begin{aligned}H_2(s) &= \sum_{p>\sigma}\left\{\frac{(1-1/p)^s-1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right\} = \sum_{p>\sigma}\frac{\mathrm{e}^{-s/p}-1}{p} + O\left(\frac{|s|}{\sigma^2\log\sigma}\right)\\ &= \int_\sigma^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s/x}-1}{x\log x}\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right) = \int_0^{1/\sigma}\frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{t\log t}\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right).\end{aligned}$$

Compte tenu de (2·3), il suit donc

$$H_1(s)+H_2(s) = \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{t\log t}\,\mathrm{d}t + \log_2\sigma + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right).$$

En reportant dans (2·2), nous obtenons bien la formule annoncée (2·1). □

3. Démonstration du Théorème 1.1

3·1. Dérivées de $\lambda_0(s)$

La preuve du Théorème 1.1 nécessite certaines estimations préalables relatives à la régularité de la fonction entière λ_0.

Lemme 3.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que λ_0 soit bornée dans le domaine $\sigma \geqslant 3$, $|s| \leqslant \sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$, et y satisfasse*

$$\lambda_0'(s) \ll \frac{1}{s}, \quad \lambda_0''(s) \ll \frac{1}{s^2}. \tag{3·1}$$

Démonstration. Comme $|\{\varphi(n)/n\}^s| \leqslant 1$ pour $\sigma \geqslant 0$, il résulte de (1·12) que

$$|\lambda(s)| \leqslant 1 \qquad (\sigma \geqslant 0). \tag{3·2}$$

Cela implique immédiatement, au vu de (2·1), que $\lambda_0(s) \ll 1$ dans les conditions de l'énoncé.

Pour montrer (3·1), nous introduisons la dérivée logarithmique

$$\psi(s) := \frac{\lambda_0'(s)}{\lambda_0(s)} = -\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{\log t} = \frac{1-\mathrm{e}^{-s/\mathrm{e}}}{s} + \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{st(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{s}.$$

On établit de manière analogue que

$$\psi'(s) = \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{t\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{\log t} \ll \frac{1}{s^2}.$$

Compte tenu des identités

$$\lambda_0'(s) = \lambda_0(s)\psi(s), \quad \lambda_0''(s) = \lambda_0'(s)\psi(s) + \lambda_0(s)\psi'(s),$$

et de la première partie de la démonstration, nous obtenons bien le résultat annoncé. □

3·2. Complétion de l'argument

Posons

$$g(w) := \int_0^w \left\{1 - G(\mathrm{e}^{-t})\right\}\,\mathrm{d}t \qquad (w > 0).$$

D'après (1·10) et (3·2), nous avons pour tous $\sigma > 0$, $T \geqslant 1$,

$$g(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda(s)\mathrm{e}^{ws}\frac{\mathrm{d}s}{s^2} + O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{3·3}$$

Sous les conditions $w\sigma \asymp 1$, $\sigma \leqslant T \leqslant \frac{1}{2}\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$, nous déduisons donc du Lemme 2.1 que

$$g(w) = G_0(w) + O\left(\frac{1}{T} + \frac{\log T}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right) \tag{3·4}$$

où l'on a posé

$$G_0(w) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}\frac{\mathrm{d}s}{s^2}\cdot$$

La fonction G_0 est indéfiniment dérivable et, toujours sous les hypothèses précédentes, vérifie

$$\begin{aligned}
G_0'(w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}\frac{\mathrm{d}s}{s},\\
G_0''(w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}\,\mathrm{d}s\\
&= \left[\frac{\lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}}{2\pi iw} - \frac{\lambda_0'(s)\mathrm{e}^{ws}}{2\pi iw^2}\right]_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} + \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{\lambda_0''(s)\mathrm{e}^{ws}}{2i\pi w^2}\,\mathrm{d}s\\
&\ll \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2T} + \frac{1}{w^2\sigma} \ll \frac{1}{w},
\end{aligned}\tag{3·5}$$

où nous avons fait appel aux estimations (3·1).

Il découle de (3·4) et (3·5) que, pour $0 < v \leqslant \frac{1}{2}w$, $\sigma w \asymp 1$, $\sigma \leqslant T \leqslant \frac{1}{2}\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$, nous avons

$$\frac{g(w+v)-g(w)}{v} = G_0'(w) + O\left(\frac{v}{w} + \frac{1}{Tv} + \frac{\log T}{\sigma v\mathcal{L}(\sigma)^c}\right).$$

La même formule vaut clairement pour $\{g(w)-g(w-v)\}/v$. Or, l'encadrement

$$\frac{g(w)-g(w-v)}{v} \leqslant 1 - G(\mathrm{e}^{-w}) \leqslant \frac{g(w+v)-g(w)}{v} \qquad (w>0,\ v>0)\tag{3·6}$$

résulte immédiatement de la croissance de la fonction $t \mapsto 1 - G(\mathrm{e}^{-t})$. Pour $0 < h \leqslant \frac{1}{3}$, choisissons alors

$$\sigma := 1/h, \qquad w := \log\{1/(1-h)\} \asymp h, \qquad v := \sqrt{w/T} \asymp \sqrt{h/T}.$$

Nous déduisons immédiatement de ce qui précède que, lorsque, par exemple, $\sigma \leqslant T \leqslant \frac{1}{2}\sigma\mathcal{L}(\sigma)^{c/2}$

$$1 - G(1-h) = G_0'(w) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{hT}}\Big).$$

Comme $w = h + O(h^2)$, l'estimation (3·5) pour G_0'' fournit

$$G_0'(w) = G_0'(h) + O(h).$$

Cela implique bien l'estimation souhaitée (1·6). □

4. Démonstration du Théorème 1.2

4·1. Lemmes relatifs à la fonction Γ *d'Euler*

Posons, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_j := \Big(\frac{1}{\Gamma}\Big)^{(j)}(1), \tag{4·1}$$

de sorte que

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = \gamma, \quad \Gamma_2 = \gamma^2 - \frac{\pi^2}{6}\cdot \tag{4·2}$$

Nous introduisons également la suite d'intégrales

$$\mathcal{H}_j(T) := \frac{1}{2i\pi}\int_{1-iT}^{1+iT} \frac{\mathrm{e}^s(\log s)^j \,\mathrm{d}s}{s} \qquad (j \in \mathbb{N},\, T \geqslant 0). \tag{4·3}$$

Lemme 4.1. *On a, uniformément pour* $T \geqslant 2$ *et* $0 \leqslant j \leqslant T$,

$$\Gamma_j = (-1)^j\mathcal{H}_j(T) + O\bigg(\frac{(\log T + \pi)^j}{T}\bigg). \tag{4·4}$$

Démonstration. La formule classique de Hankel pour $1/\Gamma$ (voir par exemple [8], th. II.5.2) fournit immédiatement

$$\Gamma_j = \frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_H \frac{\mathrm{e}^s(\log s)^j}{s}\,\mathrm{d}s \tag{4·5}$$

où H est un contour de Hankel quelconque entourant l'origine dans le sens positif et contenu dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$. Choisissons H comme la concaténation du segment $[1 - iT, 1 + iT]$, du demi-cercle épointé $\{1 - T\mathrm{e}^{i\vartheta} : 0 < |\vartheta| \leqslant \pi/2\}$ et des deux demi-droites de support $]-\infty, 1 - T]$ parcourues avec arguments respectifs $-\pi+$ et $\pi-$.

La contribution du segment vertical constitue le terme principal de (4·4).

Sur la partie circulaire, on a

$$\log s = \log T - i\vartheta + O(1/T).$$

La contribution correspondante est donc

$$\ll (\log T + \pi)^j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-T\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \ll \frac{(\log T + \pi)^j}{T}\cdot$$

Enfin, la contribution des demi-droites horizontales est

$$\ll \int_T^\infty \mathrm{e}^{-y}(\log y)^j\,\frac{\mathrm{d}y}{y} \ll T\mathrm{e}^{-T}(\log T)^j,$$

au vu de la décroissance de $y \mapsto y\mathrm{e}^{-y}(\log y)^j$ pour $y > j$. □

Lemme 4.2. *On a*

$$|\Gamma_j| \leqslant \exp\Big\{ j\log_2 j - \frac{j\log_2 j}{\log j} - \frac{j}{\log j} + O\Big(\frac{j\log_2 j}{(\log j)^2}\Big)\Big\} \qquad (j \geqslant 3). \tag{4·6}$$

Démonstration. En choisissant pour H la réunion des deux demi-droites $]-\infty,-1[$ parcourues avec arguments respectifs $-\pi+$ et $\pi-$ et du cercle unité privé du point $z=-1$, la formule de Hankel pour $1/\Gamma(z)$ fournit immédiatement, par développement au voisinage de l'origine et application de l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

$$\Gamma_{j-1} = \frac{(-1)^{j-1}}{\pi j} \int_1^\infty \mathrm{e}^{-y} \varrho(y)^j \sin\{j\vartheta(y)\}\,\mathrm{d}y + r_j \qquad (j \geqslant 1) \tag{4·7}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} r_j &:= \frac{(-1)^j}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \vartheta^j \mathrm{e}^{\cos\vartheta} \cos(\vartheta + \sin\vartheta + j\pi/2)\,\mathrm{d}\vartheta \ll \pi^j/j^2, \\ \varrho(y) &:= \sqrt{\pi^2 + (\log y)^2}, \quad \vartheta(y) := \arctan(\pi/\log y)\,. \end{aligned}$$

La méthode du col peut être employée pour déduire de (4·7) une formule asymptotique, voir par exemple [2], partie IX, problème 18. Pour la commodité du lecteur, nous fournissons une preuve courte et autonome de la majoration nécessaire à la démonstration du Théorème 1.2.

Nous évaluons le majorant suivant de l'intégrale de (4·7)

$$\Gamma_{j-1}^* := \frac{1}{\pi j} \int_1^\infty \mathrm{e}^{-y} \varrho(y)^j\,\mathrm{d}y \qquad (j \geqslant 1). \tag{4·8}$$

Désignons par y_j l'unique solution sur $[1,\infty[$ de l'équation $j\varrho'(y) = \varrho(y)$, soit encore

$$y_j(\log y_j)\bigg(1 + \frac{\pi^2}{(\log y_j)^2}\bigg) = j.$$

On montre facilement que

$$y_j = \frac{j}{\log j} + \frac{j\log_2 j}{(\log j)^2} + O\bigg(\frac{j(\log_2 j)^2}{(\log j)^3}\bigg) \qquad (j \to \infty),$$

et les techniques standard de l'analyse asymptotique fournissent, pour j assez grand, la représentation sous forme de série convergente

$$y_j = j \sum_{k\geqslant 1} \frac{P_k(\log_2 j)}{(\log j)^k}$$

où P_k est un polynôme de degré au plus $k-1$.

Posons alors $F(y)=-y+j\log\varrho(y)$. Un calcul de routine fournit, pour $z>-1$,

$$\begin{aligned}F(y_j+zy_j)&=F(y_j)-zy_j+\tfrac12 j\log\left(1+\frac{2(\log y_j)\log(1+z)+\{\log(1+z)\}^2}{(\log y_j)^2+\pi^2}\right)\\&\leqslant F(y_j)-y_jH_j(z)\end{aligned}$$

avec $H_j(z):=z-\log(1+z)\{1+\log(1+z)/(2\log y_j)\}$. On en déduit que la contribution à l'intégrale de (4·8) du domaine $|z|>y_j^{-2/5}$ est

$$\ll \mathrm{e}^{F(y_j)-cy_j^{1/5}},$$

où c est une constante strictement positive convenable. La contribution complémentaire peut être évaluée en effectuant un développement limité de $F(y_j+zy_j)$ à l'origine. Nous obtenons ainsi

$$\Gamma^*_{j-1}\sim\frac{\sqrt2\mathrm{e}^{F(y_j)}}{j\sqrt{\pi y_j}}=\exp\Big\{j\log_2 j-\frac{j\log_2 j}{\log j}-\frac{j}{\log j}+O\Big(\frac{j\log_2 j}{(\log j)^2}\Big)\Big\}.$$

□

Lemme 4.3. *Pour $j\in\mathbb{N}$, nous avons*

$$\Gamma^{(j)}(1)=(-1)^j j!\sum_{m\geqslant0}\frac{(-1)^m}{m!(m+1)^{j+1}}+O\left(\{\log(j+2)\}^j\right). \tag{4·9}$$

Démonstration. Par dérivation sous le signe d'intégration de la formule intégrale pour Γ, nous obtenons

$$\Gamma^{(j)}(1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\log t)^j\,\mathrm{d}t. \tag{4·10}$$

Nous scindons l'intégrale en deux selon la taille de t par rapport à 1. La contribution des valeurs de $t>1$ est absorbée par le terme d'erreur de (4·9), en vertu de la majoration

$$t^2\mathrm{e}^{-t}(\log t)^j\ll\{\log(j+2)\}^j\quad(t\geqslant1). \tag{4·11}$$

La contribution de l'intervalle $[0,1]$ est calculée en développant e^{-t} en série entière de t et en intervertissant sommation et intégration. On conclut en notant que

$$\int_0^1 t^m(\log t)^j\,\mathrm{d}t=\frac{(-1)^j j!}{(m+1)^{j+1}}\cdot \tag{4·12}$$

□

4·2. Développement asymptotique de $\log\boldsymbol{\lambda}_0(s)$

Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\gamma_n:=\frac{\Gamma^{(n)}(1)}{n}=(-1)^n(n-1)!\Big\{1+O\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big\}, \tag{4·13}$$

où la formule asymptotique résulte de (4·9). On a en particulier

$$\gamma_1=-\gamma,\quad\gamma_2=\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2. \tag{4·14}$$

Lemme 4.4. *Nous avons*

$$\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{t\log t} = -\log_2 s + \sum_{1\leqslant n<N} \frac{\gamma_n}{(\log s)^n} + O\left(\frac{|\gamma_N|}{|\log s|^N}\right), \tag{4·15}$$

uniformément sous les conditions

$$\sigma \geqslant 3, \quad \log|s| \ll \log\sigma, \quad 1\leqslant N \leqslant (\log|s|)/(3\log_2|s|).$$

Démonstration. Soit $I(s)$ la quantité à évaluer. Une intégration par parties permet d'écrire

$$I(s) = -\int_0^{1/\mathrm{e}} s\mathrm{e}^{-st}\log_2(1/t)\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $v = ts$ et notons que, pour $v \in]0, s/\mathrm{e}]$, les nombres $\log s$ et $1 - (\log v)/\log s$ appartiennent au demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$. On a donc

$$\log_2(s/v) = \log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right) + \log_2 s,$$

où les logarithmes itérés sont définis par composition de la détermination principale. Comme

$$\int_0^{s/\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 + O\left(\mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\right),$$

nous obtenons

$$I(s) = -\log_2 s + J(s) + O\left(\mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\log_2\sigma\right) \tag{4·16}$$

avec

$$J(s) := -\int_0^{s/\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-v}\log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right)\mathrm{d}v.$$

Pour évaluer $J(s)$, nous commençons par remplacer le segment oblique d'intégration par l'intervalle réel $[0, |s|/\mathrm{e}]$. L'erreur impliquée coïncide, d'après le théorème des résidus, avec la quantité

$$K(s) := -\int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-v}\log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right)\mathrm{d}v$$

où $\mathcal{C}$ est l'arc de cercle $\{|s|\mathrm{e}^{i\vartheta-1} : 0 \leqslant \vartheta \leqslant \arg(s)\}$. On a $\Re e\, v \geqslant \Re e\, s/\mathrm{e} = \sigma/\mathrm{e}$ pour $v \in \mathcal{C}$. On en déduit aisément que

$$K(s) \ll \mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\log_2|s| \ll \mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\log_2\sigma.$$

Il suit, par exemple,

$$J(s) = -\int_0^{|s|/\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-v}\log\left(1 - \frac{\log v}{\log s}\right)\mathrm{d}v + O\big(\mathrm{e}^{-\sigma/3}\big).$$

La contribution du segment $0 \leqslant v \leqslant \mathrm{e}/|s|$ à la dernière intégrale est

$$\int_0^{\mathrm{e}/|s|} \log\Big(2 + \Big|\frac{\log v}{\log s}\Big|\Big)\,\mathrm{d}v \ll \frac{1}{|s|}\cdot$$

Lorsque $\mathrm{e}/|s| \leqslant v \leqslant |s|/\mathrm{e}$, on a $|\log v| \leqslant |\log s| - 1$, et nous pouvons écrire

$$-\log\Big(1 - \frac{\log v}{\log s}\Big) = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{(\log v)^n}{n(\log s)^n} + O\Big(\frac{(\log v)^{N+1}\log_2|s|}{|\log s|^{N+1}}\Big).$$

Intégrons cette formule pour $\mathrm{e}/|s| \leqslant v \leqslant |s|/\mathrm{e}$ après multiplication par e^{-v}. Nous obtenons, compte tenu de ce qui précède,

$$J(s) = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \Big\{\frac{\gamma_n}{(\log s)^n} + \varepsilon_n(s)\Big\} + O\Big(\frac{N|\gamma_{N+1}|\log_2|s|}{(\log|s|)^{N+1}} + \frac{1}{|s|}\Big), \tag{4·17}$$

avec

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(s) &\ll \int_0^{\mathrm{e}/|s|} (\log v)^n\,\mathrm{d}v + \int_{|s|/\mathrm{e}}^\infty \mathrm{e}^{-v}(\log v)^n\,\mathrm{d}v \\ &\ll \int_{\log(|s|/\mathrm{e})}^\infty \mathrm{e}^{-u}u^n\,\mathrm{d}u \ll \frac{2^n n!}{\sqrt{|s|}} \ll \frac{\gamma_{N+1}}{(\log|s|)^{N+1}} \qquad (1 \leqslant n \leqslant N),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la condition $N \leqslant (\log|s|)/(3\log_2|s|)$. Ainsi la contribution globale des $\varepsilon_n(s)$ au membre de gauche de (4·17) peut être englobée par le terme résiduel. Comme cette quantité est $\ll |\gamma_N|/|\log s|^N$, nous obtenons bien la formule annoncée. □

4·3. Développement asymptotique de $\boldsymbol{\lambda_0(s)}$

Posons

$$\alpha_0 := 1, \quad \alpha_m := \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1\geqslant 1,\dots,\,k_j\geqslant 1\\ k_1+\dots+k_j=m}} \gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\cdots\gamma_{k_j} \qquad (m \geqslant 1). \tag{4·18}$$

Lemme 4.5. *On a*

$$\alpha_m = (-1)^m(m-1)!\Big\{1 + \frac{\gamma}{m} + O\Big(\frac{1}{m^2}\Big)\Big\} \qquad (m \geqslant 1).$$

Démonstration. Posons, pour $j \geqslant 1$, $m \geqslant 1$,

$$S_j(m) := \sum_{\substack{k_1\geqslant 1,\dots,\,k_j\geqslant 1\\ k_1+\dots+k_j=m}} (k_1-1)!\cdots(k_j-1)!,$$

de sorte que

$$S_j(m) = \sum_{1 \leqslant r \leqslant m-j+1} (r-1)! S_{j-1}(m-r).$$

On en déduit aisément par récurrence sur j que

$$S_j(m) \leqslant 3^j (m-j)! \tag{4·19}$$

D'après (4·13), on a $|\gamma_k| \leqslant A(k-1)!$ pour une constante positive convenable A. Reportant dans (4·18) en tenant compte de (4·19), nous pouvons écrire, pour $m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \gamma_m + \gamma_1\gamma_{m-1} + O\left(\sum_{2 \leqslant k \leqslant m-2} |\gamma_k \gamma_{m-k}| + \sum_{3 \leqslant j \leqslant m} \frac{(3A)^j (m-j)!}{j!} \right) \\ &= (-1)^m (m-1)! \left\{ 1 + \frac{\gamma}{m-1} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

□

Définissons à présent une nouvelle suite par

$$\lambda_n := \mathrm{e}^{-\gamma} \alpha_{n-1} \quad (n \geqslant 1). \tag{4·20}$$

Il résulte notamment de (4·14) et (4·18) que

$$\lambda_1 = \mathrm{e}^{-\gamma}, \quad \lambda_2 = -\gamma \mathrm{e}^{-\gamma}, \quad \lambda_3 = \mathrm{e}^{-\gamma}\left(\frac{\pi^2}{12} + \gamma^2\right), \tag{4·21}$$

alors que l'on déduit immédiatement du Lemme 4.5 que

$$\lambda_n = \mathrm{e}^{-\gamma} (-1)^{n-1} (n-2)! \left\{ 1 + \frac{\gamma}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \qquad (n \geqslant 2). \tag{4·22}$$

Lemme 4.6. *Il existe une constante $c_2 \in]0, \frac{1}{10}]$ telle que l'on ait*

$$\lambda_0(s) = \sum_{1 \leqslant n < N} \frac{\lambda_n}{(\log s)^n} + O\Big(\frac{\lambda_N}{(\log s)^N}\Big) \tag{4·23}$$

uniformément sous les conditions $\sigma \geqslant 3$, $|s| \leqslant \sigma \mathcal{L}(\sigma)^{c_2}$, $1 \leqslant N \leqslant (\log |s|)^{1-c_2}$.

Démonstration. Choisissons $c_2 := \min(c, \frac{1}{10})$ où c est la constante du Lemme 2.1 et posons $b := [1/c_2] + 1$. Nous pouvons écrire, grâce à (4·15),

$$\lambda_0(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log s} \exp\left\{ \sum_{1 \leqslant k < bN} \frac{\gamma_k}{(\log s)^k} + O\left(\frac{\gamma_{bN}}{(\log s)^{bN}}\right) \right\}. \tag{4·24}$$

Définissant la suite $\{\alpha_{mN}\}_{m=0}^{\infty}$ par la formule

$$F_N(z) := \exp\Big\{\sum_{1\leqslant n<bN}\gamma_k z^k\Big\} = \sum_{m\geqslant 0}\alpha_{mN}z^m \qquad (z\in\mathbb{C}),$$

et tenant compte du fait que $\lambda_0(s)$ est bornée dans le domaine $|s|\leqslant \sigma\mathcal{L}(\sigma)^{c_2}$, nous obtenons

$$\lambda_0(s) = \mathrm{e}^{-\gamma}\sum_{m\geqslant 0}\frac{\alpha_{mN}}{(\log s)^{m+1}} + O\left(\frac{\gamma_{bN}}{(\log s)^{bN}}\right). \tag{4·25}$$

On a $\alpha_{mN} = \alpha_m$ si $m < bN$. De plus, comme

$$F_N(z) \ll \exp\Big\{\sum_{1\leqslant k<bN}\frac{|\gamma_k|}{(bN)^k}\Big\} \ll 1$$

lorsque $|z| = 1/(bN)$, la formule de Cauchy implique

$$\alpha_{mN} \ll (bN)^m \qquad (m\geqslant 0).$$

En reportant dans (4·25), nous obtenons

$$\lambda_0(s) = \sum_{1\leqslant n<bN}\frac{\lambda_n}{(\log s)^n} + O\bigg(\Big\{\frac{bN}{\log s}\Big\}^{bN}\bigg).$$

Le terme d'erreur est $\ll 1/(\log s)^N$ en vertu du choix de b. De plus, au vu de (4·22), la contribution au terme principal des sommants d'indices $n\geqslant N$ est $\ll \lambda_N/(\log s)^N$. Cela implique bien l'estimation annoncée (4·23). □

4·4. Développement asymptotique de $\mathbf{1 - G(1 - 1/\sigma)}$

Posons, avec la notation (4·1),

$$g_m = \sum_{0\leqslant j\leqslant m-1}\binom{m-1}{j}\Gamma_j\lambda_{m-j} \qquad (m\geqslant 1), \tag{4·26}$$

et notons que les valeurs données en (1·9) résultent bien de (4·21). Nous commençons par établir l'assertion du Théorème 1.2 relative au comportement asymptotique de g_m.

Lemme 4.7. *On a*

$$g_m = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big\}\mathrm{e}^{-\gamma}(-1)^m(m-3)! \qquad (m\geqslant 3). \tag{4·27}$$

Démonstration. Reportons l'estimation (4·22) dans (4·26) lorsque $0 \leqslant j \leqslant m-2$ et estimons le terme d'indice $j = m-1$ par (4·6). Nous obtenons

$$\frac{\mathrm{e}^{\gamma}(-1)^{m-1}g_m}{(m-1)!} = \sum_{0\leqslant j\leqslant m-2} \frac{(-1)^j\Gamma_j}{(m-j-1)j!}\left\{1+\frac{\gamma}{m-j-1}\right\} + R_m \tag{4·28}$$

avec

$$R_m \ll \sum_{0\leqslant j\leqslant m-2} \frac{|\Gamma_j|}{j!(m-j-1)^3} + \Big(\frac{\mathrm{e}\log m}{m}\Big)^{m-1} \ll \frac{1}{m^3}.$$

La contribution au membre de droite de (4·28) des termes dont l'indice j vérifie $m/2 < j \leqslant m-2$ est, d'après (4·6),

$$\ll \sum_{m/2<j\leqslant m-2} \frac{|\Gamma_j|}{j!} \ll \frac{(\log m)^m}{[m/2]!} \ll \frac{1}{m^3}.$$

Lorsque $0 \leqslant j \leqslant m/2$, nous reportons dans (4·28) le développement uniforme

$$\frac{1}{m-j-1} = \frac{1}{m} + \frac{j+1}{m^2} + O\left(\frac{(j+1)^2}{m^3}\right).$$

Il suit

$$\frac{\mathrm{e}^{\gamma}(-1)^{m-1}g_m}{(m-1)!} = \left(\frac{1}{m}+\frac{\gamma}{m^2}\right)U_m + \frac{V_m}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \tag{4·29}$$

où l'on a posé

$$U_m := \sum_{0\leqslant j\leqslant m/2} \frac{(-1)^j\Gamma_j}{j!}, \quad V_m := \sum_{0\leqslant j\leqslant m/2} \frac{(j+1)(-1)^j\Gamma_j}{j!}.$$

Ainsi, U_m est la somme partielle du développement en série de Taylor de $1/\Gamma(1+x)$ en $x=-1$. La série obtenue en étendant la sommation jusqu'à l'infini est donc nulle. Il s'ensuit, d'après (4·6), que

$$U_m \ll \frac{(\log m)^m}{[m/2]!} \ll \frac{1}{m^2}.$$

Semblablement, observons que V_m est la somme partielle du développement de Taylor de $(-1/\Gamma)'(1+x)$ en $x=-1$. Il suit

$$V_m = -1 + O\left(\frac{(\log m)^m}{[m/2]!}\right) = -1 + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

En reportant dans (4·29), cela fournit bien (4·27). □

Nous sommes à présent en mesure de compléter la démonstration du Théorème 1.2.

Observons d'emblée qu'il est suffisant d'établir le développement asymptotique (1·7) pour $N \leqslant N_0 := a(\log\sigma)^{3/5}/(\log_2\sigma)^{6/5}$ où a est une constante arbitrairement petite. En effet, si $N > N_0$, on a

$$\sum_{N_0 \leqslant n < N} \frac{g_n}{(\log\sigma)^n} \ll \frac{|g_N|}{(\log\sigma)^N} + \frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^{a/2}},$$

ainsi qu'on peut l'établir en comparant N à $(\log\sigma)^{4/5}$ et $2\log\sigma$ et en utilisant l'estimation $|g_n| \ll (n/\mathrm{e})^n$ lorsque $n \leqslant 2\log\sigma$.

Nous supposons donc dans toute la suite que $N \leqslant N_0$.

Appliquons le Théorème 1.1 avec $h := 1/\sigma$ et $T := \sigma(\log\sigma)^{3N}$, ce qui est licite sous réserve de choisir la constante a assez petite. Nous obtenons

$$\begin{aligned}1-G(1-1/\sigma) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{s/\sigma}\frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left(\frac{1}{(\log\sigma)^N}\right)\\ &= \sum_{1\leqslant n<3N} \frac{\lambda_n}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{\mathrm{e}^{s/\sigma}\,\mathrm{d}s}{s(\log s)^n} + O\left(\frac{1}{(\log\sigma)^N} + \left|\lambda_{3N}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{\mathrm{e}^{s/\sigma}\,\mathrm{d}s}{s(\log s)^{3N}}\right|\right),\end{aligned}$$

où nous avons appliqué le Lemme 4.6 à l'ordre $3N$. D'après (4·22) et (4·27), le dernier terme d'erreur est

$$\ll \frac{\lambda_{3N}}{(\log\sigma)^{3N-1}} \ll \frac{g_N}{(\log\sigma)^N}.$$

Il suit

$$1 - G(1-1/\sigma) = \sum_{1\leqslant n<3N} \lambda_n H_n(\sigma) + O\left(\frac{g_N}{(\log\sigma)^N}\right), \tag{4·30}$$

où l'on a posé

$$H_n(\sigma) := \frac{1}{2i\pi}\int_{1-iT_1}^{1+iT_1} \frac{\mathrm{e}^w\,\mathrm{d}w}{w(\log\sigma w)^n} \tag{4·31}$$

pour $T_1 := (\log\sigma)^{3N}$.

Pour $1 \leqslant n < 3N$, appliquons la formule de Taylor–Lagrange

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^n} &= \sum_{0\leqslant j<3N-n} \binom{n+j-1}{j}(-x)^j\\ &\quad + n\binom{3N-1}{n}(-x)^{3N-n}\int_0^1 \frac{(1-t)^{3N-n-1}}{(1+tx)^n}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

pour $x := (\log w)/(\log \sigma)$, et reportons dans (4·31). La contribution du reste intégral est estimée par interversion des intégrales en w et t. Elle vaut

$$\binom{3N-1}{n}\frac{(-1)^{3N-n}n}{2\pi i(\log \sigma)^{3N-n}}\int_0^1 (1-t)^{3N-n-1}\,\mathrm{d}t\int_{1-iT_1}^{1+iT_1}\frac{(\log w)^{3N-n}\mathrm{e}^w\,\mathrm{d}w}{w(\log \sigma + t\log w)^n}\cdot$$

Une intégration par parties permet d'estimer l'intégrale en w. Nous obtenons qu'elle est

$$\ll \frac{(3N-n+1)!}{(\log \sigma)^n}$$

uniformément en t. Nous avons ainsi établi que la contribution à $H_n(\sigma)$ du reste de Taylor–Lagrange est

$$\ll \frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}}\cdot$$

Nous en déduisons que

$$H_n(\sigma) = \sum_{0\leqslant j<3N-n}\frac{(-1)^j(n+j-1)!}{(n-1)!j!(\log \sigma)^{n+j}}\mathcal{H}_j(T_1) + O\bigg(\frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}}\bigg),$$

où $\mathcal{H}_j$ est défini en (4·3). Appliquons (4·4) avec $T = T_1$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Nous pouvons majorer la contribution du terme d'erreur de (4·4) par

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j<3N-n}\frac{(n+j-1)!(2\log T_1)^j}{(n-1)!j!(\log \sigma)^{n+j}T_1} &\ll \frac{(3N)!}{T_1(n-1)!}\sum_{1\leqslant j<3N-n}\frac{1}{j!}\\ &\ll \frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité $2\log T_1 \leqslant \log \sigma$. Cela fournit

$$H_n(\sigma) = \sum_{0\leqslant j<3N-n}\frac{(n+j-1)!\Gamma_j}{(n-1)!j!(\log \sigma)^{n+j}} + O\bigg(\frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}}\bigg).$$

Nous reportons dans (4·30). Il suit

$$G(1) - G(1-1/\sigma) = \sum_{1\leqslant n<3N}\frac{g_n}{(\log \sigma)^n} + O\bigg(\frac{(3N)!}{(\log \sigma)^{3N}} + \frac{|g_N|}{(\log \sigma)^N}\bigg). \tag{4·32}$$

Or, compte tenu des estimations (4·27), nous avons, pour $N \leqslant N_0$,

$$\sum_{N\leqslant n<3N}\frac{|g_n|}{(\log \sigma)^n} + \frac{(3N)!}{(\log \sigma)^{3N}} \ll \frac{g_N}{(\log \sigma)^N}\cdot$$

Cela achève la démonstration.

Bibliographie

[1] H.G. Diamond & D. Rhoads, The modulus of continuity of the distribution function of $\varphi(n)/n$, *Topics in classical number theory*, vols. I, II (Budapest, 1981), 335–353, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 34, North-Holland, Amsterdam, 1984.
[2] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.
[3] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory : mean value theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. **239**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1979.
[4] P. Erdős, On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, *Amer. J. Math.* **61** (1939), 722–725.
[5] P. Erdős, On the distribution of numbers of the form $\sigma(n)/n$ and on some related questions, *Pacific J. Math.* **52** (1974), 59–65.
[6] I.J. Schoenberg, Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1, *Math. Z.* **28** (1928), 171–200.
[7] I.J. Schoenberg, On asymptotic distributions of arithmetical functions, *Trans. A.M.S.* **39** (1936), 315–330.
[8] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n°1, Société Mathématique de France, 1995.
[9] V. Toulmonde, *Fonction de répartition de* $\varphi(n)/n$, Thèse de doctorat, Université d'Évry-Val d'Essonne, 2004.
[10] V. Toulmonde, Module de continuité de la fonction de répartition de $\varphi(n)/n$, *Acta arith.*, à paraître.
[11] V. Toulmonde, Comportement au voisinage de 1 de la fonction de répartition de $\varphi(n)/n$, prépublication.

Gérald Tenenbaum & Vincent Toulmonde
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France
gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr
vincent.toulmonde@iecn.u-nancy.fr